EJERCICIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Escribe en forma polar el resultado del cociente: $\dfrac{i^5 - i^{-8}}{i\sqrt{2}}$

2. La suma de las partes reales de dos complejos conjugados es 6 y el módulo de uno de ellos es 5. Calcula ambos números.

3. La suma de dos números complejos es $3+i$ y la parte real de uno de ellos es 2. Determina dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.

4. Calcula *m* y *n* para que se cumpla la igualdad: $\dfrac{4m-2i}{3+ni} = 6-2i$.

5. Calcula las partes reales e imaginarias de:

a) $\dfrac{3-2i}{2-3i}$ b) $\dfrac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3}$ c) $\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}} - \dfrac{2}{1+i\sqrt{3}} + \dfrac{5/2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$ d) $(1-i)(1+i)i$

e) $(5-i)(1+5i)$ f) $(1+i)^4$ g) $(2+5i)^3$ h) $\dfrac{6i(2-i)(1-2i)^2}{3+i}$ i) i^{3459}

6. Dados los números complejos $z_1 = 5_{\pi/4}$, $z_2 = 2_{15^\circ}$ y $z_3 = 4i$, calcula

a) $z_3 \cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{(z_2)^2}$ c) $\dfrac{z_1 \cdot z_2^3}{z_3}$ d) $z_1 \cdot z_2$ e) $\dfrac{(z_1)^3}{z_2 \cdot (z_3)^2}$ f) $z_3\,\dfrac{z_1}{z_2}$

7. Sea $z = \dfrac{3-ki}{1-i}$. Calcula el valor de *k* para que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$

8. Sea $z = 3_{30^\circ}(3-ki)$. Calcula el valor de *k* para que *z* sea un número imaginario puro.

9. Sea $z = \dfrac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de *k* para que $z = 2-i$.

10. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de *k* para que *z* sea un número imaginario puro.

11. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $z = 2-3i$.

12. Utilizando la Fórmula de Moivre halla las expresiones de sen 3α y cos 3α en función de sen α y cos α.

13. Recurriendo a la fórmula de Moivre, expresa sen 5α y cos 5α en función de sen α y cos α.

14. Sea $\mathrm{z} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$. Calcular: a) $\bar{\mathrm{z}}$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{z}}$ c) z^4 d) $\sqrt[4]{\mathrm{z}}$

15. Contesta verdadero o falso, justificando las respuestas:
- Si se multiplican dos números complejos que no son reales, no se obtiene nunca un número real.
- El cuadrado del conjugado de *z* es igual al conjugado del cuadrado de *z*.
- Si dos números complejos tienen las mismas raíces cúbicas, entonces dichos números son iguales.
- Un número complejo imaginario puro no tiene ninguna de sus raíces cúbicas imaginaria pura.

16. Representa gráficamente las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $x^2 + 16 = 0$

17. Las raíces de una ecuación de segundo grado son $x_1 = 3+4i$ y $x_2 = 3-4i$. Halla la ecuación.

18. Expresa en forma binómica los siguientes complejos:

a) 7_{120° b) $2_{\pi/6}$ c) $3_{3\pi/4}$ d) 5_{135°

19. Determina las formas polar y trigonométrica de los números:

a) $-2\sqrt{3}-2i$ b) $3-3\sqrt{3}\,i$ c) $-4+4i$ d) $7+7i$

20. Si $z = 3+3i$, halla el número complejo que tiene igual módulo que z y cuyo argumento es:

a) $\arg(z)+\pi$ b) $\arg(z)+\dfrac{\pi}{4}$ c) $3\arg(z)$

21. Hallar los números complejos tales que $\bar{z} = z^{-1}$.

22. Halla el módulo, el argumento y después la forma binómica de cada uno de los siguientes números complejos:

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ}$ b) $1_{33^\circ}\cdot 2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ c) $6_{-21^\circ}:2_{24^\circ}$ d) $(2_{25^\circ})^3\cdot 3_{15^\circ}$

e) $2_{106^\circ}:1_{61^\circ}$ f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^6$ g) $(-2+2i)^{10}$ h) $(2_{51^\circ})^4:(4_{72^\circ})^2$

23. Calcula el resultado de las siguientes operaciones, y escríbelos en todas las formas que conoces:

a) $\dfrac{(1+i)(1-i)^5}{2-2\sqrt{3}\,i}$ b) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\,i}+\dfrac{2}{1+i}$

24. Escribe en todas las formas que conoces las soluciones de la ecuaciones:

a) $x^2+i\,x+2=0$ b) $x^3+2i\,x^2+2x=0$ c) $z^2-z+1=0$ d) $x^3+3x=0$

e) $x^2+x+1=0$ f) $x^2-4x+13=0$ g) $\dfrac{z}{1+i}+\dfrac{z}{i}=2i$ h) $x^2-2x+2=0$

i) $\dfrac{1+i}{z}-i=(3+2i)^3$ j) $\dfrac{z-3}{2z-i}=1-i$ k) $\dfrac{z}{2i}+\dfrac{z+1}{4-2i}=3$ l) $\dfrac{z}{3+2i}+\dfrac{z}{4-2i}=3+i$

25. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $z_1=2+i$ y $z_2=5+3i$, halla los otros dos vértices.

26. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en (0,0) y (4,1). Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está en el primer cuadrante.

27. Una raíz cuarta de un número complejo es $-1+i$. Calcula dicho número y sus restantes raíces cuartas.

28. Calcula las raíces cúbicas de:

a) $\dfrac{(1+i)\cdot(1-i)^4}{(1+2i)^3}$ b) $\dfrac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}$ c) $\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}$ d) $\dfrac{i^{-3}-i^4}{\sqrt{2}i}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i}$ f) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ g) $\dfrac{1+i}{2-i}$

29. Halla todos los números complejos de módulo unidad tales que sus raíces cuartas están situadas en las bisectrices de los ejes real e imaginario.

30. Una raíz cúbica de un número complejo es $1+i$. Halla dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.

31. Halla el número complejo cuyas raíces cúbicas tienen módulo 1 y están situadas en los vértices de un triángulo:

a) que tiene un vértice sobre la parte positiva del eje real. b) que tiene un vértice sobre la parte negativa del eje imaginario. c) que no tiene ningún vértice sobre los ejes.

32. De un pentágono regular centrado en el origen conocemos un vértice que es el punto $(1,-\sqrt{3})$. Calcula los restantes vértices.

33. Calcula:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{-i}}$ b) $\left(\dfrac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}\right)^5$ c) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^5$ d) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}-i)}$

e) $\sqrt[3]{2-2i}$ f) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ g) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$ h) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^4$